गणितीय निदर्शन A2

A2.1 भूमिका

- एक वयस्क मानव शरीर में लगभग 1,50,000 किमी लंबी धमनियाँ और शिराएँ होती हैं जिनमें रक्त प्रवाहित होता है।
- मनुष्य का हृदय शरीर में प्रति 60 सेकंड में 5 से 6 लीटर तक रक्त पंप करता रहता है।
- सूर्य की सतह का तापमान लगभग 6000° C है।

क्या आपको यह जानकर आश्चर्य हुआ है कि किस प्रकार हमारे वैज्ञानिक और गणितज्ञ इन परिणामों का आकलन कर सके हैं? क्या उन्होंने कुछ वयस्कों के मृत शरीरों से धमनियों और शिराओं को बाहर निकाल कर इनकी लंबाई मापी है? क्या हृदय द्वारा प्रति सेकंड पंप किए गए रक्त की मात्रा ज्ञात करने के लिए शरीर से रक्त को बाहर निकाला है? क्या सूर्य की सतह का तापमान ज्ञात करने के लिए उन्होंने अपने साथ थर्मामीटर लेकर सूर्य तक की यात्रा की है? निश्चित ही ऐसा नहीं हुआ है। तब प्रश्न उठता है कि उन्होंने इन आँकड़ों को किस तरह प्राप्त किया है।?

निश्चय ही इसका उत्तर **गणितीय निदर्शन** में निहित है, जिससे हम आपको कक्षा IX में परिचित करा चुके हैं। आपको याद होगा कि गणितीय निदर्शन वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति का गणितीय विवरण होता है और आपको यह भी याद होगा कि गणितीय निदर्शन किसी समस्या का गणितीय निदर्श प्राप्त करने का एक प्रक्रम है। साथ ही समस्या का विश्लेषण करने और हल करने में इसका प्रयोग किया जाता है।

अतः गणितीय निदर्शन में, हम वास्तविक जगत से जुड़ी किसी समस्या को लेते हैं और उसे हम एक तुल्य गणितीय समस्या में रूपांतरित कर देते हैं। तब हम गणितीय समस्या हल

करते हैं और इसके हल की व्याख्या वास्तविक जगत् से जुड़ी समस्या के साथ करते हैं। और तब यह देखना आवश्यक है कि प्राप्त हल अर्थपूर्ण है, जो निदर्श के मान्यकरण का एक चरण है। कुछ उदाहरण जहाँ गणितीय निदर्शन अत्यंत महत्वपूर्ण है, नीचे दिए हैं:

(i) एक ऐसे स्थान पर किसी नदी की गहराई और चौड़ाई ज्ञात करना जहाँ पहुँचा नहीं जा सकता है।

(ii) पृथ्वी और अन्य ग्रहों का द्रव्यमान आकलित करना।

(iii) पृथ्वी और किसी अन्य ग्रह के बीच की दूरी आकलित करना।

(iv) किसी देश में मानसून के आने की प्रागुक्ति करना।

(v) स्टॉक मार्केट की प्रवृत्ति (Trend) की प्रागुक्ति करना।

(vi) किसी व्यक्ति के शरीर में रक्त का आयतन आकलित करना।

(vii) 10 वर्ष बाद किसी नगर की जनसंख्या की प्रागुक्ति करना।

(viii) किसी पेड़ की पत्तियों की संख्या आकलित करना।

(ix) किसी नगर के वायुमंडल में उपस्थित विभिन्न प्रदूषकों का ppm आकलित करना।

(x) पर्यावरण पर प्रदूषकों का प्रभाव आकलित करना।

(xi) सूर्य की सतह का तापमान आकलित करना।

इस अध्याय में हम गणितीय निदर्शन के प्रक्रम पर पुन:विचार करेंगे और इसे स्पष्ट करने के लिए हम अपने आस-पास के के जगत् से जुड़े कुछ उदाहरण लेगें। अनुच्छेद A2.2 में हम एक निदर्श के निर्माण से संबंधित सभी चरणों से आपको परिचित कराएँगे। अनुच्छेद A2.3 में हम विभिन्न प्रकार के उदाहरणों पर चर्चा करेंगे। अनुच्छेद A2.4 में, हम गणितीय निदर्शन के महत्त्व से संबंधित कारणों पर विचार करेंगे।

यहाँ यह स्मरण रहे कि हमारा लक्ष्य उस महत्वपूर्ण विधि के प्रति आपको जागरूक करना है, जिसमें गणित वास्तविक जगत् से जुड़ी समस्याओं को हल करने में सहायक होती है। फिर भी गणितीय निदर्शन के महत्त्व को वास्तव में समझने के लिए आपको गणित का कुछ और ज्ञान होना आवश्यक होता है। उच्च कक्षाओं में आपको इससे संबंधित कुछ उदाहरण देखने को मिलेंगे।

A2.2 गणितीय निदर्शन के चरण

कक्षा IX में, हमने निदर्शन के प्रयोग से संबंधित कुछ उदाहरणों पर विचार किया था। क्या इन उदाहरणों से आपको प्रक्रम और इससे संबंधित चरणों की कुछ सूक्ष्म जानकारी प्राप्त हुई थी? आइए हम गणितीय निदर्शन से संबंधित मुख्य चरणों पर पुन:विचार करें।

चरण 1 (समस्या समझना) वास्तविक समस्या परिभाषित कीजिए और यदि आप एक समूह में काम कर रहे हैं, तो उन समस्याओं पर विचार कीजिए जिन्हें आप समझना चाहते हैं। कुछ कल्पनाएँ करके और कुछ कारकों की उपेक्षा करके समस्या को प्रबंध योग्य कीजिए जिससे कि समस्या का प्रबंधन किया जा सके।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए हमारी समस्या एक झील में मछलियों की संख्या आकलित करना है। यहाँ यह संभव नहीं है कि प्रत्येक मछली को पकड़ कर बाहर निकाला जाए और फिर उनकी गिनती की जाए। ऐसी स्थिति में हम संभवत: एक प्रतिदर्श (Sample) ले सकते हैं और इसकी सहायता से झील में उपस्थित मछलियों की कुल संख्या आकलित करने का प्रयास कर सकते हैं।

चरण 2 (गणितीय विवरण और सूत्रण): समस्या के विभिन्न पहलुओं का वर्णन गणितीय शब्दों में कीजिए। लक्षणों को गणितीय रूप में वर्णन करने की कुछ विधियाँ ये हैं:

- चरों को परिभाषित कीजिए
- समीकरण या असमिकाएँ लिखिए
- आँकड़े एकत्रित कीजिए और उन्हें सारणी रूप में संगठित कीजिए
- ग्राफ बनाइए
- प्रायिकताएँ परिकलित कीजिए

उदाहरण के लिए: एक प्रतिदर्श लेकर जैसा कि चरण 1 में बताया गया है, हम मछलियों की कुल संख्या का आकलन किस प्रकार करते हैं? तब हम प्रतिदर्श के रूप में ली गई मछलियों को चिह्नित करते हैं, और उन्हें शेष मछलियों के साथ रहने के लिए झील में पुन: छोड़ देते हैं। इसके बाद पुन: झील से मछलियों का एक अन्य प्रतिदर्श लेते हैं और यह देखते हैं कि इस नए प्रतिदर्श में पहले चिह्नित की गई कितनी मछलियाँ हैं। तब अनुपात और समानुपात का प्रयोग करके हम मछलियों की कुल संख्या का एक आकलन प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए आइए हम झील से 20 मछलियों का एक प्रतिदर्श लें और उन्हें चिह्नित कर तदुपरांत उन्हें उसी झील में छोड़ दें जिससे वे झील की शेष मछलियों के साथ

मिल जाएँ। तब मछलियों के इस मिश्रित समूह से हम एक अन्य प्रतिदर्श (मान लीजिए 50 मछलियों का प्रतिदर्श) लेते हैं और देखते हैं कि इस नए प्रतिदर्श में चिह्नित मछलियों की संख्या कितनी है। अत: हम अपने आँकड़े एकत्रित करते हैं और उसका विश्लेषण करते हैं।

यहाँ हम यह मान कर चलते हैं कि चिह्नित मछलियाँ अन्य मछलियों के साथ एक समान रूप से मिल जाती हैं और जो प्रतिदर्श हम लेते हैं, वह मछलियों की कुल संख्या का एक अच्छा प्रतिनिधि है।

चरण 3 (गणितीय समस्या हल करना): तब विभिन्न गणितीय तकनीकों को लागू करके चरण 2 में विकसित की गई सरलीकृत गणितीय समस्या को हल किया जाता है।

उदाहरण के लिए मान लीजिए कि चरण 2 के उदाहरण के दूसरे प्रतिदर्श में 5 मछलियाँ चिह्नित हैं। अत: मछलियों की कुल संख्या का $\frac{5}{50}$ अर्थात् $\frac{1}{10}$ चिह्नित हैं। यदि यह कुल संख्या का प्रतिरूपी हो, तो जनसंख्या का $\frac{1}{10} = 20$.

अत: कुल जनसंख्या $= 20 \times 10 = 200$.

चरण 4 (हल की व्याख्या): पिछले चरण में प्राप्त किए गए हल को अब हम वास्तविक जीवन से जुड़ी उस स्थिति के संदर्भ में लेते हैं, जिससे हमने चरण 1 प्रारंभ की थी।

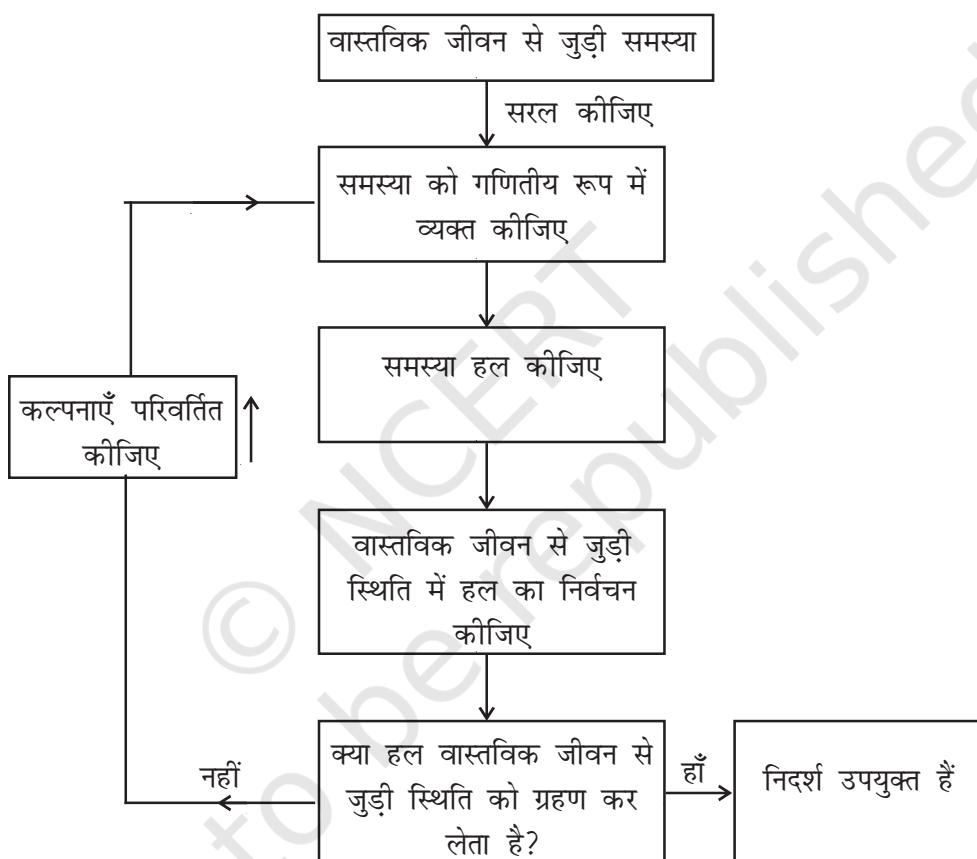
उदाहरण के लिए चरण 3 की समस्या का हल करने पर हमें मछलियों की कुल संख्या 200 प्राप्त हुई थी।

चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण): अब हम अपनी मूल स्थिति पर लौट आते हैं और देखते हैं कि गणितीय विधि से प्राप्त किए गए परिणाम सार्थक हैं या नहीं। यदि सार्थक हैं तो हम निदर्श का प्रयोग तब तक करते हैं जब तक कि नई सूचना उपलब्ध नहीं होती है या कल्पनाएँ परिवर्तित हो जाती हैं।

कभी-कभी सरलीकरण के संबंध में की गई कल्पनाओं के कारण गणितीय विवरण देते समय वास्तविक समस्या के अनिवार्य पहलुओं से हम वंचित रह सकते हैं। ऐसी स्थितियों में हल बहुधा वास्तविकता से हट कर होता है और वास्तविक स्थिति में इसका कोई अर्थ नहीं होता। यदि ऐसा होता है, तो हम चरण 1 में की गई कल्पनाओं पर पुन:विचार करते हैं और कुछ अन्य कारकों को लेकर जिन्हें पहले नहीं लिया गया था, इन्हें वास्तविक बना देते हैं।

उदाहरण के लिए चरण 3 में हमने मछलियों की कुल संख्या का एक आकलन प्राप्त किया था, यह झील में उपस्थित मछलियों की वास्तविक संख्या नहीं भी हो सकती है। अब

हम यह देखते हैं कि चरण 2 और 3 को कुछ बार दोहराने पर प्राप्त किए गए परिणामों का माध्य लेने पर हमें कुल संख्या का उत्तम आकलन प्राप्त होता है या नहीं इससे मछलियों की संख्या का एक उत्तम आकलन प्राप्त हो जाएगा।

गणितीय निदर्शन प्रक्रम को देखने की एक अन्य विधि आकृति A2.1 में दिखाई गई है।

आकृति A2.1

हल की सरलता बनाए रखने के लिए, निदर्शक सरलीकरण और परिशुद्धता के बीच संतुलन बनाए रखना चाहते हैं। वे आशा करते हैं कि सन्निकट वास्तविकता के इतने निकट हो, कि कुछ प्रगति हो सके। सर्वोत्तम परिणाम वह होता है जिससे यह प्रागुक्ति की जा सके कि आगे क्या होगा या जिससे सामान्य परिशुद्धता के साथ परिणाम का आकलन किया जा सके। स्मरण रहे कि समस्या को सरल बनाने के संबंध में हमारे द्वारा की गई भिन्न-भिन्न

कल्पनाओं से भिन्न-भिन्न निदर्श प्राप्त हो सकते हैं। अत: कोई भी निदर्श परिपूर्ण नहीं होता। कुछ उत्तम या इससे भी कुछ बेहतर निदर्श हो सकते हैं।

प्रश्नावली A2.1

1. *निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए।*

तेरहवीं शताब्दी के प्रारंभ में लियोनार्ड फिबोनशी ने एक प्रश्न किया कि उस स्थिति में कितने खरगोश हो जाएँगे जबकि आप ने केवल दो खरगोशों से प्रारंभ किया था और यहाँ यह मान लीजिए कि एक जोड़ा खरगोश हर महीने शिशुओं का एक जोड़ा पैदा करता है और खरगोश का प्रत्येक जोड़ा अपना पहला शिशु दो महीने की आयु पर पैदा करता है। माह-प्रति-माह खरगोशों के जोड़ों की संख्या शून्य और पहले महीने को छोड़कर पिछले दो महीने में खरगोशों का योग होता है।

महीना	खरगोशों के जोड़े
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ठीक 16 महीने बाद आपके पास खरगोशों के लगभग 1600 जोड़े प्राप्त हो जाते हैं। इस स्थिति में समस्या का और गणितीय निदर्शन के विभिन्न चरणों का स्पष्ट कथन दीजिए।

A2.3 कुछ दृष्टांत

आइए अब हम गणितीय निदर्शन के कुछ उदाहरण लें

उदाहरण 1 (एक जोड़ा पासा फेंकना): मान लीजिए आपकी अध्यापिका आपको अनुमान लगाने के निम्नलिखित खेल की चुनौती देती है। इस खेल में वह एक जोड़ा पासा फेकेंगी। पासा फेंके जाने से पहले आपको यह अनुमान लगाना होता है कि पासों पर आई संख्याओं का योग क्या होगा। सही उत्तर होने पर आपको दो पाइंट मिलेंगे और गलत उत्तर होने पर आपके दो पाइंट कट जाएँगे। कौन-सी संख्याएँ सर्वोत्तम अनुमान होंगी?

हल:

चरण 1 (समस्या समझना) : आपको कुछ ऐसी संख्याओं का ज्ञात होना आवश्यक होता है जिनका पासों पर आने का संयोग अधिक होता है।

चरण 2 (गणितीय विवरण) : गणितीय रूप में यह समस्या पासों पर आई संख्याओं के विभिन्न संभव योगों की प्रायिकताएँ ज्ञात करने में परिवर्तित हो जाती है।

निम्नलिखित 36 संख्या-युग्मों में से एक यादृच्छिक विकल्प के रूप में व्यक्त करके हम अत्यधिक सरल रूप में स्थिति का निदर्शन कर सकते हैं।

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

प्रत्येक युग्म की पहली संख्या पहले पासे पर आने वाली संख्या होती है और दूसरी संख्या दूसरे पासे पर आने वाली संख्या होती है।

चरण 3 (गणितीय समस्या को हल करना): ऊपर के प्रत्येक युग्म की संख्याओं को जोड़ने पर संभावित योग के रूप में हमें 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 प्राप्त होते हैं। यह मानकर कि सभी 36 युग्म सम-संभावी (equally likely) हैं, हमें इनमें से प्रत्येक की

प्रायिकता ज्ञात करनी होती है।

इसे हम निम्नलिखित सारणी के रूप में व्यक्त करते हैं:

योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

यहाँ आप यह पाते हैं कि 7 का योग प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है जो कि अन्य संख्याओं को योग के रूप में प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है।

चरण 4 (हल का निर्वचन) क्योंकि योग 7 प्राप्त करने की प्रायिकता अधिकतम है, इसलिए आपको संख्या सात का अनुमान बार-बार लगाना चाहिए।

चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण) एक जोड़ा पासों को अनेक बार उछालिए और एक सापेक्ष बारंबारता सारणी बनाइए। सापेक्ष बारंबारताओं की तुलना संगत प्रायिकताओं से कीजिए। यदि ये एक-दूसरे के निकट न हो, तो ऐसी स्थिति में पासे संभवत: अभिनत (biased) होंगे। तब, उस संख्या का मान निकालने के लिए हम आँकड़े प्राप्त कर सकते हैं जिस पर अभिनत है।

अगला उदाहरण लेने से पहले हमें इसकी कुछ पृष्ठभूमि का ज्ञान होना आवश्यक होता है।

अनेक लोगों के साथ यह सामान्य अनुभव होता है कि जब उन्हें धनराशि की आवश्यकता होती है, उनके पास आवश्यक धनराशि नहीं होती। दैनिक जीवन की आवश्यक वस्तुओं को खरीदने या आराम की वस्तुओं को खरीदने के लिए हमें धनराशि की आवश्यकता होती है। स्कूटर, रेफ्रीजरेटर, टेलीविजन, कार आदि जैसी वस्तुओं को खरीदने के संबंध में सीमित निधि वाले ग्राहकों के लिए व्यापारियों ने *किस्त योजना* नामक एक योजना चलाई है।

कभी-कभी इन वस्तुओं को खरीदने के संबंध में ग्राहकों को लुभाने के लिए एक विक्रेता विपणन तकनीक के अंतर्गत किस्त योजना चलाता है। किस्त योजना के अंतर्गत वस्तु खरीदते समय ग्राहक को एक समय में पूरा भुगतान नहीं करना होता। वस्तु खरीदते समय उसे वस्तु की कीमत के एक अंश का ही भुगतान करना होता है और शेष राशि का भुगतान किस्तों में किया जा सकता है जो कि मासिक, तिमाही, छमाही या वार्षिक हो सकती है। हाँ, यह बात अवश्य है कि किस्त योजना के अंतर्गत खरीददार को कुछ अधिक राशि का भुगतान करना होता है। क्योंकि बाद की तिथियों में *(जिसे आस्थिगत भुगतान* (deferrd payment) *कहा जाता है)* भुगतान किए जाने के कारण विक्रेता कुछ ब्याज वसूल करता है।

किस्त योजना को अच्छी तरह समझने से संबंधित कुछ उदाहरण लेने से पहले आइए हम इस संकल्पना से संबंधित बार-बार प्रयुक्त होने वाले शब्दों को समझ लें।

एक वस्तु की नकद कीमत वह धनराशि होती है जिसका भुगतान ग्राहक को वस्तु खरीदते समय करना होता है।

टिप्पणी: यदि भुगतान योजना ऐसी हो कि शेष धनराशि का पूरा भुगतान एक वर्ष के अंदर ही कर दिया जाता हो, तब ऐसी स्थिति में आस्थिगत भुगतान पर साधारण ब्याज लगाया जाता है।

पुराने समय में ऋण के रूप में ली गई राशि पर लगाए गए ब्याज को प्राय: अच्छा नहीं माना जाता था। यहाँ तक कि ऐसा करना वर्जित माना जाता था। ब्याज के भुगतान से संबंधित कानून से बचने की एक विधि यह थी कि ऋण एक मुद्रा में लिया जाता था और भुगतान दूसरी मुद्रा में किया जाता था और इस तरह ब्याज विनियम दर छिप जाता था।

आइए अब हम एक संबंधित गणितीय निदर्शन समस्या पर विचार करें।

उदाहरण 2: जूही एक साइकिल खरीदना चाहती है। इसके लिए वह बाज़ार जाती है और पाती है कि जो साइकिल वह खरीदना चाहती है उसकी कीमत ₹ 1800 है। जूही के पास ₹ 600 हैं। अत: वह दुकानदार को यह बताती है कि वह इस स्थिति में नहीं है कि वह इस समय साइकिल खरीद सके। थोड़ा बहुत हिसाब लगाने के बाद वह जूही को यह बताता है कि ₹ 600 नकद देकर और शेष धनराशि ₹ 610 की दो मासिक किस्त देकर वह साइकिल खरीद सकती है। अब जूही के सामने दो विकल्प बचे रहते हैं। या तो वह किस्त योजना को मान ले या बैंक से ऋण लेकर जो कि 10% की वार्षिक साधारण ब्याज पर उपलब्ध है, नकद भुगतान कर दे तो बताइए कि आर्थिक दृष्टि से कौन-सा विकल्प अधिक उत्तम होगा?

हल :

चरण 1 (समस्या समझना): जूही को यह निर्धारित करना है कि वह दुकानदार द्वारा दिए गए विकल्प को मान ले या नहीं। इसके लिए उसे यह चाहिए कि वह दो ब्याज-दरों से परिचित हो जाए, एक तो वह जो कि किस्त योजना में लगाया जाता है और दूसरा वह जो ब्याज बैंक लगाता है (अर्थात् 10%)।

चरण 2 (गणितीय विवरण): योजना को स्वीकार या अस्वीकार करने के लिए उसे बैंक द्वारा ली जाने वाली ब्याज-दर की तुलना में दुकानदार द्वारा दी जाने वाली ब्याज-दर को देखना होता है। ध्यान रहे कि चूँकि पूरी धनराशि का भुगतान एक वर्ष के अंदर-अंदर करना है,

इसलिए राशि पर साधारण ब्याज ही देना होगा।

हम जानते हैं कि साइकिल की नकद कीमत = ₹ 1800

और किस्त योजना के अंतर्गत नकद भुगतान = ₹ 600

अत: शेष कीमत जिसका भुगतान किस्त योजना के अंतर्गत करना है = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200

मान लीजिए दुकानदार द्वारा लिया जाने वाला वार्षिक ब्याज दर r % है।

प्रत्येक किस्त की धनराशि = ₹ 610

किस्तों में भुगतान की जाने वाली धनराशि = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

किस्त योजना के अंतर्गत भुगतान किया जाने वाला ब्याज = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

क्योंकि जूही एक महीने तक ₹ 1200 अपने पास रखती है, इसलिए

पहले महीने का मूलधन = ₹ 1200

दूसरे महीने का मूलधन = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

दूसरे महीने के मूलधन की शेष राशि ₹ 590 + लगाया गया ब्याज ₹ 20 = मासिक किश्त ₹ 610 = दूसरी किश्त।

अत: एक महीने का कुल मूलधन = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

अब ब्याज = ₹ $\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ (2)

चरण 3: (समस्या हल करना): (1) और (2) से हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

या $$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (लगभग)}$$

चरण 4: (हल का निर्वचन): किश्त योजना के अंतर्गत लगाया गया ब्याज दर = 13.14 %.

बैंक द्वारा लगाया गया ब्याज दर = 10%

अत: साइकिल खरीदने के लिए उसे बैंक से ऋण लेना अधिक पसंद करना चाहिए क्योंकि आर्थिक दृष्टि से यह अधिक उत्तम है।

चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण) इस स्थिति में इस चरण का कोई विशेष महत्त्व नहीं है, क्योंकि संख्याएँ नियत हैं। फिर भी, बैंक से ऋण लेने के संबंध में स्टैंप पेपर की लागत जैसी औपचारिकताएँ निभाने के कारण प्रभावी ब्याज दर, यदि किस्त योजना की ब्याज दर से अधि क हो जाता है तो वह अपनी राय बदल भी सकती है।

टिप्पणी : अभी भी ब्याज दर का निदर्शन अपनी प्रारंभिक अवस्था में है और अभी भी मान्यकरण वित्तीय बाजार की एक समस्या है। यदि किस्त नियत करने में भिन्न-भिन्न ब्याज दर निगमित किया गया हो, तब मान्यकरण एक महत्वपूर्ण समस्या हो जाता है।

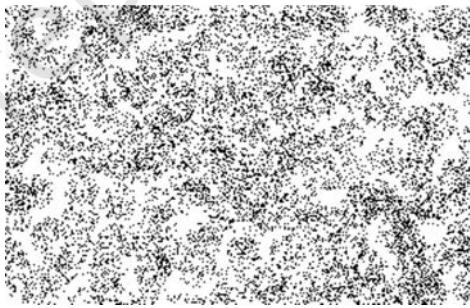
प्रश्नावली A2.2

नीचे दी गई प्रत्येक समस्या में समस्याओं को हल करने के लिए गणितीय निदर्शन की विभिन्न अवस्थाओं को दर्शाइए।

1. एक ऑर्निथॉलॉजिस्ट एक बड़े क्षेत्र में तोतों की संख्या आकलित करना चाहती है। इनमें से कुछ को पकड़ने के लिए वह एक जाल बिछाती है और 32 तोते पकड़ लेती है, जिन्हें वह रिंग पहनाकर आज़ाद छोड़ देती है। अगले सप्ताह में वह 40 तोतों के लिए जाल बिछाती है जिनमें 8 रिंगित हो जाते हैं।

(i) उसके दूसरे पकड़ का कितना अंश रिंगित होता है?

(ii) क्षेत्र में तोतों की कुल संख्या का एक आकलन ज्ञात कीजिए।

2. मान लीजिए संलग्न आकृति एक जंगल के एक हवाई जहाज से खीचीं गई फोटो को दर्शाता है, जिसमें प्रत्येक बिंदु एक पेड़ निरूपित करता है। आपका उद्देश्य पर्यावरण सर्वेक्षण के एक अंश के रूप में इस मार्ग पर पेड़ों की संख्या ज्ञात करना है।

आकृति A2.2

3. एक टी. वी. को या तो ₹ 24000 नकद देकर या ₹ 8000 नकद और ₹ 2800 की छः मासिक किस्तों में भुगतान करके खरीदा जा सकता है। एक टी. वी. खरीदने के लिए अली बाज़ार जाता है और इसके लिए उसके पास ₹ 8000 हैं। इस समय उसके पास दो विकल्प हैं। एक विकल्प यह है कि वह किस्त योजना के अंतर्गत टी. वी. खरीदे और दूसरा विकल्प यह है कि किसी वित्तीय सोसाइटी से ऋण लेकर नकद भुगतान

करके टी. वी. खरीदे। सोसाइटी 18% की वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ब्याज लगाती है। अली के लिए कौन-सा विकल्प अधिक उत्तम है?

A2.4 गणितीय निदर्शन का महत्त्व क्यों है?

जैसाकि हमने उदाहरणों में देखा है कि गणितीय निदर्शन एक आंतर विषय शाखा है। इसमें गणितज्ञ और अन्य विषय क्षेत्रों के विशेषज्ञ वर्तमान उत्पादों में सुधार लाने, उत्तम उत्पाद विकसित करने या कुछ उत्पादों के व्यवहार की प्रागुक्ति करने में अपने ज्ञान और विशेषज्ञता का सहयोग देते हैं।

यूँ तो निदर्शन का महत्वपूर्ण होने के अनेक विशेष कारण हैं परंतु किसी न किसी रूप में अधिकांश कारणों का संबंध निम्नलिखित से होता है :

- *समझदारी बढ़ाना :* यदि एक ऐसा गणितीय निदर्श हो जो वास्तविक जगत से जुड़े तंत्र के अनिवार्य व्यवहार को प्रदर्शित करता हो, तो निदर्श का विश्लेषण करके हम तंत्र को अच्छी तरह समझ सकते हैं। और, निदर्श का निर्माण करते समय ही हम यह पता लगा लेते हैं कि तंत्र में कौन-कौन कारक अधिक महत्वपूर्ण हैं और तंत्र की भिन्न-भिन्न पहलू एक-दूसरे के साथ किस प्रकार संबंधित हैं।

- *प्रागुक्ति या पूर्वानुमान या अनुकरण करना :* प्राय: हम यह जानना चाहते हैं कि वास्तविक जगत से जुड़े तंत्र का भविष्य में क्या महत्त्व है, परंतु तंत्र के साथ सीधा प्रयोग करना खर्चीला, अव्यावहारिक या असंभव होता है। उदाहरण के लिए, मौसम की प्रागुक्ति के लिए, मानव में औषधि-दक्षता का अध्ययन करने, एक न्यूक्लीयर रिऐक्टर का इष्टतम अभिकलन ज्ञात करना, आदि-आदि।

  अनेक प्रकार के संगठनों में पूर्वानुमान लगाने का अधिक महत्त्व होता है, क्योंकि निर्णयन में भावी घटनाओं की प्रागुक्तियों को निगमित करना होता है। उदाहरण के लिए:

  - विपणन विभागों में माँग के विश्वसनीय पूर्वानुमान बिक्री संबंधी तकनीकों की योजना बनाने में सहायक होते हैं।

  - स्कूल बोर्ड को विभिन्न ज़िलों में स्कूल जाने वाले बच्चों की संख्या में हो रही वृद्धि का पूर्वानुमान लगाना आवश्यक होता है, जिससे यह निर्णय लिया जा सके कि कहाँ और कब नए स्कूल खोले जा सकें।

  प्राय: भविष्य की प्रागुक्ति करने के लिए पूर्वानुमान लगाने वाले पिछले आँकड़ों का प्रयोग करते हैं। सबसे पहले तो उस प्रतिरूप को पहचानने के लिए आँकड़ों का

विश्लेषण करते हैं जो इसका वर्णन कर सके। तब पूर्वानुमान लगाने के लिए इन आँकड़ों और प्रतिरूप का प्रयोग भविष्य में किया जाता है। इस आधारभूत रणनीति का प्रयोग अधिकांश पूर्वानुमान तकनीकों में किया जाता है और यह इस कल्पना पर आधारित होता है कि वह प्रतिरूप जिसे पहचान लिया गया है, भविष्य में भी लागू होता रहेगा।

- *आकलन करना :* प्रायः हमें बड़े मानों का आकलन करना होता है। इस संबंध में जंगल में वृक्षों, झील में मछलियों आदि से संबंधित उदाहरण आप देख चुके हैं। एक अन्य उदाहरण के रूप में, चुनाव के पहले चुनाव में भाग लेने वाली पार्टियाँ चुनाव में अपनी पार्टी के जीतने की प्रायिकता की प्रागुक्ति करना चाहती हैं। विशेष रूप से वे इस बात का आकलन करना चाहती हैं कि उनके निर्वाचन क्षेत्र के कितने लोग उनकी पार्टी को वोट देंगे। अपनी प्रागुक्ति के अनुसार अपने चुनाव अभियान की रणनीति के बारे में निर्णय ले सकते हैं। चुनाव में, किस पार्टी को कितनी सीटें मिलेंगी, इसकी प्रागुक्ति करने के लिए निर्गम मतानुमान (exit polls) का व्यापक प्रयोग किया जाता है।

प्रश्नावली A2.3

1. पिछले पाँच वर्षों के आँकड़ों के आधार पर वर्ष के अंत में दसवीं कक्षा के बोर्ड परीक्षा में आपके स्कूल द्वारा गणित में प्राप्त किए जाने वाले औसत प्रतिशत अंकों का पूर्वानुमान लगाइए।

A2.5 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. एक गणितीय निदर्श वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति का गणितीय विवरण होता है। गणितीय निदर्शन वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्याओं को हल करने और इसे प्रयोग करने के लिए गणितीय निदर्श का निर्माण करने का प्रक्रम है।
2. निदर्शन में निम्नलिखित चरण लागू किए जाते हैं : समस्या समझना, गणितीय निदर्श का सूत्रण, इसे हल करना, वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति में इसका निर्वचन करना और अंत में अति महत्वपूर्ण निदर्श का मान्यकरण।
3. कुछ गणितीय निदर्श विकसित करना।
4. गणितीय निदर्शन का महत्त्व।